KisMókusok!

Menjünk biztosra, a kiadott háziban az állítás kábé így igazolhatod:

Tesztelés után a kérdés: Mit szeretnék látni „” re? Ezt:

Megjegyzés: szétnéztem a laptopon és nanáhogy találtam egy korábbi teljes indukció kidolgozott jegyzetet, közülük íme:

Feladat: Igazolja teljes indukcióval a következő összefüggéseket!

1.) Bizonyítandó, hogy az különbség, minden természetes szám esetén osztható -vel!

Az oszthatóság jelöléseinek felhasználásával felírva:

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis a bizonyításban megjelenő helyére -et helyettesítünk, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, tehát igaz lesz: állítás.

A lehetséges átalakítások elvégzése után kapott kéttagú összeg első tagja az indukciós feltétel értelmében osztható -vel, a második tag pedig azért osztható -vel, mert van benne egy -es szorzótényező.

Megjegyzés: az állítás a teljes indukciós bizonyítás felhasználása nélkül is igazolható, ha szorzatalakra hozunk, majd azt mondjuk, ha az páros természetes szám, akkor készen vagyunk, ha pedig páratlan, akkor lesz páros és ezért osztható -vel a szorzat.

2.) Bizonyítandó, hogy az összeg, minden természetes szám esetén osztható -mal!

Az oszthatóság jelöléseinek felhasználásával felírva:

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis a bizonyításban megjelenő helyére -et helyettesítünk, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, tehát igaz lesz:

A lehetséges átalakítások elvégzése után kapott összeg első tagja az indukciós feltétel értelmében osztható -mal, a zárójelen kívüli többi tag pedig azért osztható -mal, mert mindegyik tartalmaz -as szorzótényezőt.

Megjegyzés: az állítás a teljes indukciós bizonyítás felhasználása nélkül is igazolható. A -mal való oszthatóság esetén lehetséges osztási maradék adódhat: . Ha az természetes szám eleve osztható -mal, tehát alakú, akkor készen vagyunk, hiszen összeg is biztosan osztható -mal.

Ha nem osztható maradék nélkül -mal, akkor illetve esetekben

Azt látjuk, mindkét esetben, mindegyik tag tartalmaz -as szorzótényezőt.

3.) Bizonyítandó, hogy az szorzat, minden természetes szám esetén osztható -tal!

Az oszthatóság jelöléseinek felhasználásával felírva:

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis a bizonyításban megjelenő helyére -et helyettesítünk, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, tehát igaz lesz:

A lehetséges átalakítások elvégzése után kapott összeg első tagja az indukciós feltétel értelmében osztható -tal, a zárójelen kívüli tagok pedig azért oszthatók -tal, mert mindegyik tartalmaz -os szorzótényezőt.

4.) Bizonyítandó, hogy a kifejezés, minden természetes szám esetén osztható -tel!

Az oszthatóság jelöléseinek felhasználásával felírva:

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis a bizonyításban megjelenő helyére -et helyettesítünk, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, tehát igaz lesz:

A lehetséges átalakítások elvégzése után kapott összeg első tagja az indukciós feltétel értelmében osztható -tel, a zárójelen kívüli tag pedig azért osztható -tel, mert tartalmaz -ös szorzótényezőt.

5.) Bizonyítandó, hogy a kifejezés, minden természetes szám esetén osztható -cal!

Az oszthatóság jelöléseinek felhasználásával felírva:

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis a bizonyításban megjelenő helyére -et helyettesítünk, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, tehát igaz lesz:

A lehetséges átalakítások elvégzése után kapott összeg első tagja az indukciós feltétel értelmében osztható -cal, a zárójelen kívüli tagok pedig azért oszthatók -cal, mert tartalmaznak -as szorzótényezőt.

6.) Bizonyítandó, hogy az kifejezés, minden természetes szám esetén osztható -cel!

Az oszthatóság jelöléseinek felhasználásával felírva:

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

esetén amely oszthatóság teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis a bizonyításban megjelenő helyére -et helyettesítünk, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, tehát igaz lesz:

A lehetséges átalakítások elvégzése után kapott összeg első tagja az indukciós feltétel értelmében osztható -cel, a zárójelen kívüli tag pedig azért osztható -cel, mert tartalmaz -es szorzótényezőt.

7.) Bizonyítandó:

(Ennek jelentése, ha a természetes számokat -től kezdve harmadikra hatványozzuk, majd azokat összeadjuk, akkor az összeadandó tagok számától függően, az összeg mindig alakban számolható.)

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely feltétel teljesül.

esetén amely feltétel teljesül.

esetén amely feltétel teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, tehát teljesül:

Vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis ha az előbbi összefüggés bal oldalán lévő tagú összeadást kiegészítjük, az -ik taggal, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, akkor a jobb oldali zárt képlet jelenik meg -es helyettesítéssel, tehát igaz lesz:

A bal oldalon hozzunk közös nevezőre, majd alakítsunk szorzattá:

A bal oldal tört számlálójának második zárójelén belüli összeg szorzattá alakítható, éppen alakban.

Megjegyzés: a természetes számok közül az elsőtől kezdve hatványozzuk azokat, majd összeadjuk, akkor azokra felírható zárt képlet, például a tizedik hatványaik összegére:

8.)

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely feltétel teljesül.

esetén amely feltétel teljesül.

esetén amely feltétel teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, tehát teljesül:

Vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis ha az előbbi összefüggés bal oldalán lévő tagú összeadást kiegészítjük, az -ik taggal, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, akkor a jobb oldali zárt képlet jelenik meg -es helyettesítéssel, tehát igaz lesz:

A bal oldalon hozzunk közös nevezőre, majd alakítsunk szorzattá:

9.)

Végezzünk tesztelést értékekre.

esetén amely feltétel teljesül.

esetén amely feltétel teljesül.

esetén amely feltétel teljesül.

Tegyük fel, hogy „”-re igaz az állítás, tehát teljesül:

Vizsgáljuk, hogy öröklődik-e a tulajdonság „”-re, vagyis ha az előbbi összefüggés bal oldalán lévő tagú összeadást kiegészítjük, az -ik taggal, majd olyan algebrai átalakításokat végzünk, hogy abba „belecsempésszük” az indukciós feltevésben szereplő kifejezést, akkor a jobb oldali zárt képlet jelenik meg -es helyettesítéssel, tehát igaz lesz:

A bal oldalon hozzunk közös nevezőre, majd alakítsunk szorzattá: